PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE BALEARES

SEPTIEMBRE - 2008

RESUELTOS

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Se valorará la corrección y la claridad en el lenguaje (matemático o no matemático) empleado por el alumno. Penalizan los errores de cálculo. Los errores graves, y especialmente, aquellos que lleven a resultados incoherentes o absurdos, serán penalizados con la aplicación del 50 % sobre la calificación en cuestión. Se valorarán todas las partes que sean correctas, aunque el resultado final no lo sea.
Contesta de manera clara y razonada una de las dos opciones propuestas. Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. La calificación final se obtiene de dividir el total entre 4.

OPCIÓN A

1º) Determina todas las matrices de la forma $X=\begin{pmatrix} x & y \\ z & 0 \end{pmatrix}$ que conmuten (X · A = A · X) con la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

$$\left.\begin{array}{l} X \cdot A=\begin{pmatrix} x & y \\ z & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+3y & 2x+4y \\ z+0 & 2z+0 \end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix} x+3y & 2x+4y \\ z & 2z \end{pmatrix}} \\ \\ A \cdot X=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+2z & y+0 \\ 3x+4z & 3y+0 \end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix} x+2z & y \\ 3x+4z & 3y \end{pmatrix}} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x+3y & 2x+4y \\ z & 2z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+2z & y \\ 3x+4z & 3y \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x+3y=x+2z \\ z=3x+4z \\ 2x+4y=y \\ 2z=3y \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 3y=2z \\ 3x=-3z \\ 2x=-3y \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \underline{z=-x} \\ \underline{y=-\frac{2}{3}x} \end{array}\right.$$

Las matrices X son de la forma $\underline{\underline{X=\begin{pmatrix} x & -\frac{2}{3}x \\ -x & 0 \end{pmatrix},\ \forall x \in R}}$

****

2º) Determina el punto A del plano $\pi \equiv 2x - y + z = 0$ más próximo al punto P(1, 1, 1).

El haz de rectas paralelas y perpendiculares al plano $\pi \equiv 2x - y + z = 0$ tienen como vector director al vector normal del plano π, que es $\overrightarrow{n} = (2,\ -1,\ 1)$.

De las infinitas rectas del haz anterior, la que pasa por P es $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$.

La solución es el punto Q de intersección del plano π con la recta r es:

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv 2x - y + z = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 2(1 + 2\lambda) - (1 - \lambda) + (1 + \lambda) = 0 \ ;;\ 2 + 4\lambda - 1 + \lambda + 1 + \lambda = 0 \ ;;\ 6\lambda + 2 = 0 \ ;;$$

$$3\lambda + 1 = 0 \ ;;\ \underline{\lambda = -\frac{1}{3}} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \\ y = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \\ z = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{Q\left(\frac{1}{3},\ \frac{4}{3},\ \frac{2}{3}\right)}}$$

****

3º) Se considera la función $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$. Se pide:

a) Calcular $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ y $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

b) Calcular los extremos relativos.

c) Hacer un dibujo de la función.

----

a)

$$\lim_{x \to +\infty} f(x)=\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2+1}=\frac{\infty}{\infty} \Rightarrow In\det. \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2+1}{x^2}}=\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}}=\frac{\frac{1}{\infty}}{1+\frac{1}{\infty}}=$$

$$=\frac{0}{1+0}=\underline{\underline{0}}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x)=\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x^2+1}=\frac{-\infty}{\infty} \Rightarrow In\det. \Rightarrow \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2+1}{x^2}}=\lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}}=\frac{\frac{1}{-\infty}}{1+\frac{1}{\infty}}=$$

$$=\frac{-0}{1+0}=\underline{\underline{0}}$$

b)

Para estudiar los extremos relativos, derivamos:

$$f'(x)=\frac{1\cdot(x^2+1)-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}=\underline{\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}=f'(x)}$$

Para que una función tengo un máximo o un mínimo relativo es condición necesaria que se anule la primera derivada:

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}=0 \;;\; 1-x^2=0 \Rightarrow \underline{x_1=-1} \;;\; \underline{x_2=1}.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos recurrimos a la segunda derivada: si es negativa para los valores que anulan la primera derivada se trata de un máximo y, en caso contrario de un mínimo:

$$f''(x)=\frac{-2x\cdot(x^2+1)^2-(1-x^2)\cdot 2\cdot(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4}=\frac{-2x\cdot(x^2+1)-4x(1-x^2)}{(x^2+1)^3}=$$

$$= \frac{-2x^3 - 2x - 4x + 4x^2}{\left(x^2+1\right)^3} = \frac{-2x^3 + 4x^2 - 6x}{\left(x^2+1\right)^3} = \underline{\frac{-2x\left(x^2 - 2x + 3\right)}{\left(x^2+1\right)^3} = f''(x)}$$

$$f''(-1) = \frac{-2\cdot(-1)\left[(-1)^2 - 2\cdot(-1) + 3\right]}{\left[(-1)^2+1\right]^3} = \frac{2\cdot(1+2+3)}{(1+1)^3} = \frac{12}{8} > 0 \Rightarrow \underline{\textit{Mínimo para } x = -1}$$

$$f(-1) = \frac{-1}{(-1)^2+1} = \frac{-1}{1+1} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \underline{\underline{\textit{Mínimo relativo}: P\left(-1,\ -\frac{1}{2}\right)}}$$

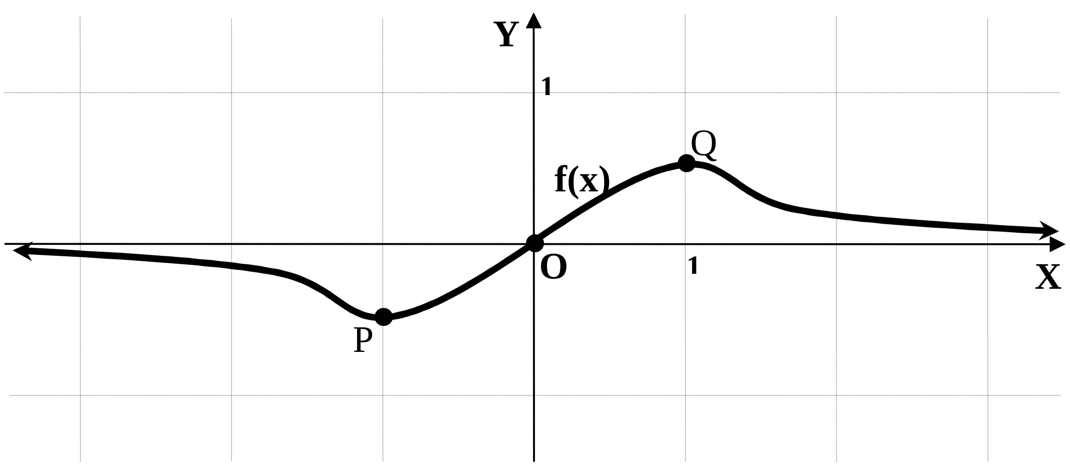
$$f''(1) = \frac{-2\cdot 1\cdot\left(1^2 - 2\cdot 1 + 3\right)}{\left(1^2+1\right)^3} = \frac{-2\cdot(1-2+3)}{(1+1)^3} = \frac{-4}{8} < 0 \Rightarrow \underline{\textit{Máximo para } x = 1}$$

$$f(1) = \frac{1}{1^2+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \underline{\underline{\textit{Máximo relativo}: Q\left(1,\ \frac{1}{2}\right)}}$$

<u>Observación</u>: El máximo relativo se podía haber obtenido teniendo en cuenta que la función es simétrica con respecto al origen por cumplir que f(x) = - f(-x).

c)

Teniendo en cuenta que el eje X es asíntota de la función, según se demuestra en el apartado a), la represtación gráfica, aproximada, es la que aparece en el gráfico adjunto.



****

4º) a) Se considera la curva $y=e^{kx},\ k>0$. Escribe la ecuación de la función A(k) que nos da el área de la región limitada por esta curva y las rectas y = 0, x = 0 y x = 1.

b) Hacer un dibujo de la situación.

c) Calcula $\lim\limits_{k \to 0} A(k)$.

----

a)

La curva $y=e^{kx}$ tiene todas sus ordenadas positivas, por lo cual, el área en función de k viene expresada por la siguiente integral definida:

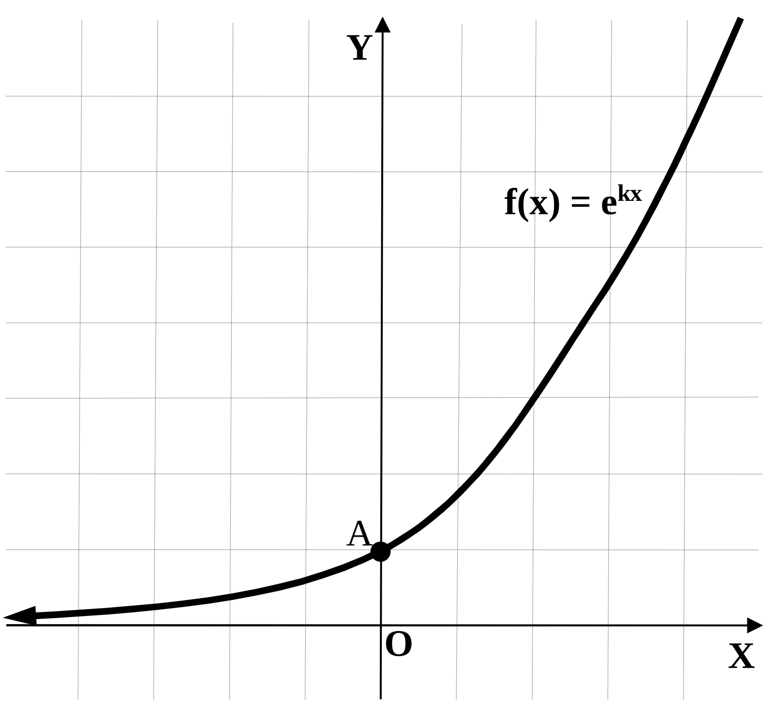
$$A(k)=\int_0^1 e^{kx}\cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} kx=t \\ dx=\frac{1}{k}\cdot dt \end{array}\right\| \left.\begin{array}{l} x=1 \to t=k \\ x=0 \to t=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \int_0^k e^t \cdot \frac{1}{k}\cdot dt = \frac{1}{k}\cdot \left[e^t\right]_0^k = \frac{1}{k}\cdot\left(e^k - e^0\right)=$$

$$=\frac{1}{k}\cdot\left(e^k-1\right)=\underline{\underline{\frac{e^k-1}{k}=A(k)}}$$

b)

Teniendo en cuenta que se trata de una función exponencial de base positiva es monótona creciente y su recorrido es $(0,\ +\infty)$ y, por ser $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{kx}=0$, siendo k > 0, el eje de abscisas es asíntota horizontal de la curva. Corta al eje de ordenadas en el punto A(0, 1).

La representación gráfica de la situación es la de la figura:



c)

$$\lim_{k \to 0} A(k) = \lim_{k \to 0} \frac{e^k - 1}{k} = \frac{e^0 - 1}{0} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Ins\det er. \Rightarrow \{L\'{}Hopital\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{k \to 0} \frac{e^k}{1} = \frac{e^0}{1} = \frac{1}{1} = \underline{\underline{1}}$$

****

OPCIÓN B

1º) Demuestra, para matrices de dimensión 2 x 2, que “el determinante de un producto de matrices es el determinante del producto de las matrices”. ¿Es cierto que “el determinante de una suma de matrices es la suma de los determinantes de las matrices”?

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y $X=\begin{pmatrix} x & y \\ z & p \end{pmatrix}$. Su producto es:

$$A \cdot X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & p \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax+bz & ay+bp \\ cx+dz & cy+dp \end{pmatrix}.$$

El determinante del producto es el siguiente:

$$|A \cdot X|=\begin{vmatrix} ax+bz & ay+bp \\ cx+dz & cy+dp \end{vmatrix}=(ax+bz)(cy+dp)-(ay+bp)(cx+dz)=$$

$$=acxy+adpx+bcyz+bdpz-acxy-adyz-bcpx-bdpz=\underline{adpx+bcyz-adyz-bcpx=|A \cdot X|}$$

Los valores de los determinantes de las matrices son:

$$|A|=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=\underline{ad-bc=|A|} \quad ;; \quad |X|=\begin{vmatrix} x & y \\ z & p \end{vmatrix}=\underline{xp-yz=|X|}$$

El producto de los determinantes es el siguiente:

$$|A| \cdot |X|=(ad-bc)(xp-yz)=\underline{adpx-adyz-bcpx+bcyz=|A| \cdot |X|}$$

$$\underline{\underline{|A \cdot B|=|A| \cdot |X| \ \ como \ \ se \ \ pedía \ \ demostrar.}}$$

Veamos si se cumple que $|A+X|=|A|+|X|$:

$$A+X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x & y \\ z & p \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+x & b+y \\ c+z & d+p \end{pmatrix}$$

$$|A+X|=\begin{vmatrix} a+x & b+y \\ c+z & d+p \end{vmatrix}=(a+x)(d+p)-(b+y)(c+z)=$$

$$=\underline{ad+ap+dx+px-bc-bz-cy-yz=|A+X|}$$

$$|A|+|X|=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x & y \\ z & p \end{vmatrix}=\underline{ad-bc+px-yz=|A|+|X|}$$

$$\underline{\underline{|A+B|\neq|A|+|X| \quad como \;\; se \;\; ha \;\; demostrado.}}$$

****

2º) Determina un punto de la recta $r \equiv (x,\ y,\ x) = (0,\ 1,\ -1) + (1,\ 2,\ 3)t$ más próximo al punto P(1, 1, 1).

El haz de planos perpendiculares a la recta $r \equiv (x,\ y,\ x) = (0,\ 1,\ -1) + (1,\ 2,\ 3)t$ tienen como vector normal al vector director de r que es $\overrightarrow{n} = (1,\ 2,\ 3)$.

El haz de planos tiene por ecuación general $\alpha \equiv x + 2y + 3z + D = 0$.

De l0s infinitas planos del haz anterior, el que contiene al punto P(1, 1, 1) tiene que satisfacer su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \equiv x + 2y + 3z + D = 0 \\ P(1,\ 1,\ 1) \end{array}\right\} \Rightarrow 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + D = 0 \ \ ;; \ \ \underline{D = -6} \ \Rightarrow \ \underline{\pi \equiv x + 2y + 3z - 6 = 0}.$$

La solución es el punto Q de corte de la recta r y el plano π, que es el siguiente:

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 1 + 2t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$.

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv x + 2y + 3z - 6 = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 1 + 2t \\ z = -1 + 3t \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow t + 2(1 + 2t) + 3(-1 + 3t) - 6 = 0 \ \ ;; \ \ t + 2 + 4t - 3 + 9t - 6 = 0 \ \ ;;$$

$$14t - 7 = 0 \ \ ;; \ \ 2t - 1 = 0 \ \ ;; \quad \underline{t = \frac{1}{2}} \ \Rightarrow \ \left.\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 1 + 1 = 2 \\ z = -1 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}\right\} \Rightarrow \ \underline{\underline{Q\left(\frac{1}{2},\ 2,\ \frac{1}{2}\right)}}$$

****

3º) Se considera la función $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$. Se pide:

a) Calcular $\lim_{x\to 1} f(x)$; $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to +\infty} f(x)$.

b) Calcular los extremos relativos.

c) Hacer un dibujo de la función.

----

a)

$$\lim_{x\to 1} f(x) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2}{x-1} = \frac{(1^-)^2}{1^- -1} = \frac{1}{0^-} = \underline{-\infty} \\ \\ \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2}{x-1} = \frac{(1^+)^2}{1^+ -1} = \frac{1}{0^+} = \underline{+\infty} \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim_{x\to 1^+} f(x) \Rightarrow$$

<u>La función carece de límite para x = 1.</u>

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2}{x-1} = \frac{\infty}{-\infty} \Rightarrow In\det. \Rightarrow \lim_{x\to -\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x-1}{x^2}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\infty}-\frac{1}{\infty}} = \frac{1}{0+0} = \frac{1}{0} = \underline{\underline{+\infty}}$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{x-1} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow In\det. \Rightarrow \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x-1}{x^2}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\infty}-\frac{1}{\infty}} = \frac{1}{0+0} = \frac{1}{0} = \underline{\underline{+\infty}}$$

b)

Para estudiar los máximos y mínimos relativos calculamos sus derivadas primera y segunda:

$$f'(x) = \frac{2x\cdot(x-1) - x^2\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{2x^2-2x-x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2} = \underline{\frac{x(x-2)}{(x-1)^2} = f'(x)}$$

$$f''(x) = \frac{(2x-2)\cdot(x-1)^2 - x(x-2)\cdot 2\cdot(x-1)\cdot 1}{(x-1)^4} = \frac{(2x-2)\cdot(x-1) - 2x(x-2)}{(x-1)^3} =$$

$$= \frac{2x^2-2x-2x+2-2x^2+4x}{(x-1)^3} = \underline{\frac{2}{(x-1)^3} = f''(x)}$$

Para que existan máximos o mínimos relativos es condición necesaria que se anule la primera derivada:

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}=0 \;\;;;\; x(x-2)=0 \;\;;;\; \underline{x_1=0} \;\;;;\; \underline{x_2=2}$$

$$f''(0)=\frac{2}{(0-1)^3}=\frac{2}{-1}=-2<0 \;\Rightarrow\; Máx. \;\;;;\; f(0)=0 \;\;\Rightarrow\;\; \underline{\underline{Máx. \to O(0,\; 0)}}$$

$$f''(2)=\frac{2}{(2-1)^3}=\frac{2}{1}=2>0 \;\Rightarrow\; Mín. \;\;;;\; f(2)=\frac{2^2}{2-1}=4 \;\;\Rightarrow\;\; \underline{\underline{Mín. \to P(2,\; 4)}}$$

c)

Con objeto de facilitar el dibujo de la función, vamos a determinar sus asíntotas, que son las siguientes:

<u>Horizontales</u>: son los valores finitos que toma la función cuando x tiende a valer infinito; son de la forma y = k.

Del primer apartado sabemos que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, de donde se deduce que la función no tiene asíntotas horizontales.

<u>Verticales</u>: son los valores de x que anulan el denominador: $x-1=0 \;\;\Rightarrow\;\; \underline{\underline{x=1}}$

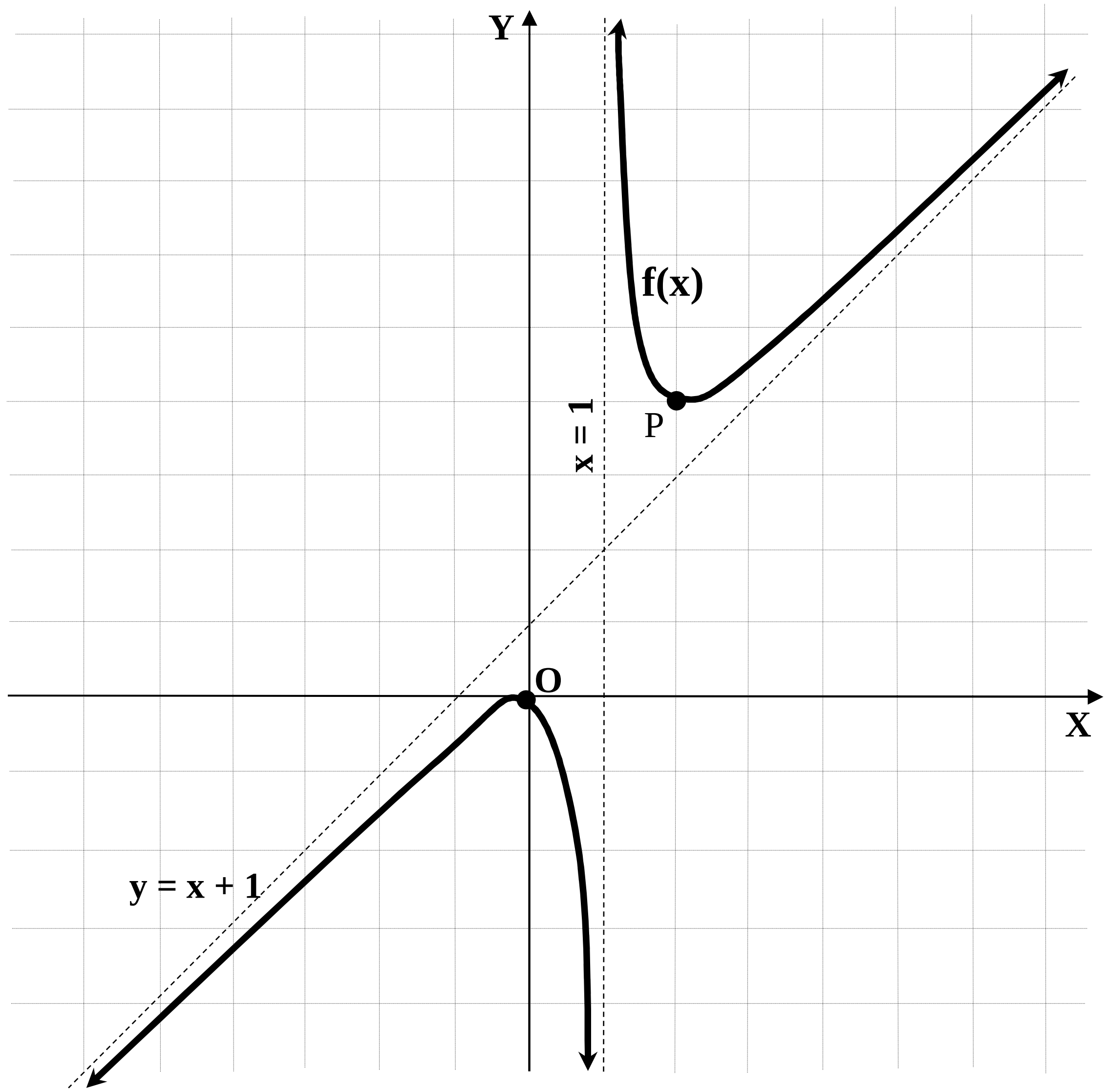
<u>Oblicuas</u>: Para que una función racional tenga asíntotas oblicuas es necesario que el grado del numerador sea una unidad mayor que el grado del denominador; como en nuestro caso ocurre eso, <u>tiene asíntotas oblicuas.</u>

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^2}{x-1}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x^2-x} = \underline{1=m}$$

$$n = \lim_{x \to \infty} [f(x)-mx] = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2}{x-1}-x\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2-x^2+x}{x-1} = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{x-1} = \underline{1=n}$$

$$Asíntota\;\; oblícua \;\Rightarrow\; \underline{\underline{y=x+1}}$$

Con los datos anteriores, la representación gráfica de la función es, aproximadamente, la siguiente:


Y
f(x)
x = 1
P
O
X
y = x + 1

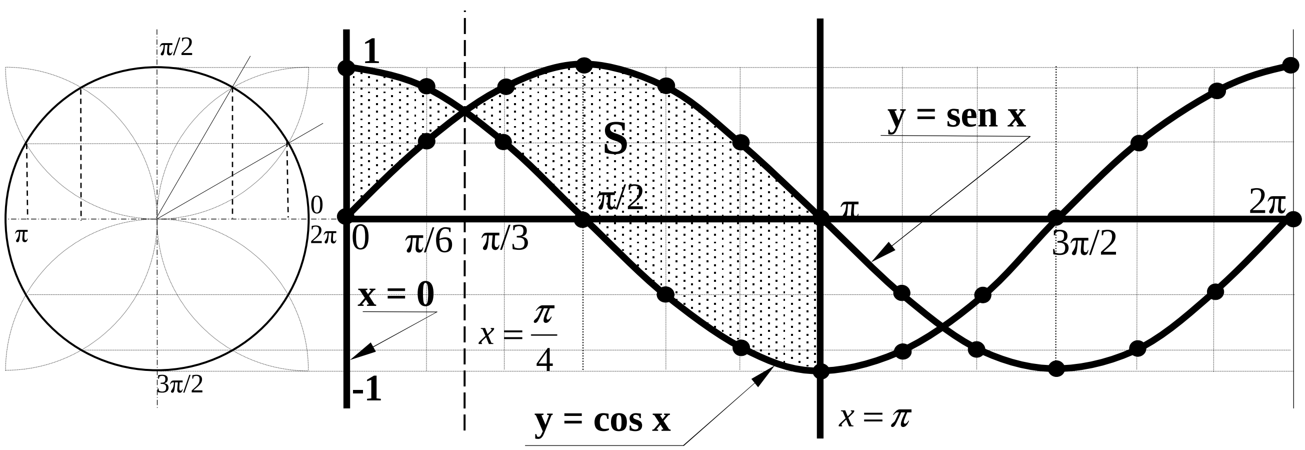
****

4º) Dibuja la región limitada por las curas y = sen x, y = cos x, y las rectas x = 0 y $x = \pi$. Calculad el área del recinto.

Las gráficas de las funciones seno y coseno se diferencian en que tienen un desfase de $\frac{\pi}{2}$ (90º). (La palabra coseno se deriva de <u>co</u>mplemento del <u>seno</u>)

Se trata de dos funciones continuas cuyo dominio es R y el recorrido de ambas es [-1, 1]; el periodo de ambas es (2π).

Teniendo en cuenta que el coseno de un ángulo es igual al seno del ángulo complementario, las gráficas de las funciones seno y coseno son las que se indican a continuación, expresadas en el intervalo de un giro.



Como puede observarse, en el intervalo comprendido por las dos rectas verticales $x = 0 \;\; y \;\; x = \frac{\pi}{4}$, las ordenadas de la curva y = cos x son mayores que las de y = cos x y en el intervalo comprendido entre las rectas verticales $x = \frac{\pi}{4} \;\; y \;\; x = \pi$ son mayores las ordenadas de y = sen x que las de y = cos x, por lo cual el área pedida es la siguiente:

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos\ x - sen\ x) \cdot dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (sen\ x - \cos\ x) \cdot dx = [sen\ x + \cos\ x]_0^{\frac{\pi}{4}} + [-\cos\ x - sen\ x]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} =$$

$$= \left[\left(sen\ \frac{\pi}{4} + \cos\ \frac{\pi}{4}\right) - (sen\ 0 + \cos\ 0)\right] + \left[(-\cos\ \pi - sen\ x) - \left(-\cos\ \frac{\pi}{4} - sen\ \frac{\pi}{4}\right)\right] =$$

$$= sen\ \frac{\pi}{4} + \cos\ \frac{\pi}{4} - sen\ 0 - \cos\ 0 - \cos\ \pi - sen\ x + \cos\ \frac{\pi}{4} + sen\ \frac{\pi}{4} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 - 1 - (-1) - 0 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{2} - 1 + 1 = \underline{\underline{2\sqrt{2}\ u^2 = S}}$$

****